ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. А. Бакланов

Новосибирск, 2023

1. Основные понятия теории вероятностей

2. Вероятностные неравенства

3. Законы больших чисел и ряды случайных величин
   - Сходимость рядов независимых случайных величин

Сходимость рядов независимых случайных величин

Цель настоящего параграфа — дать критерии, позволяющие определять, сходится или расходится ряд из независимых случайных величин.

Определение

Ряд случайных величин $\sum_{k \geqslant 1} X_k$ *сходится с вероятностью 1*, если последовательность частичных сумм S_n фундаментальна почти наверное, т. е. с вероятностью 1 существует конечный предел $S(\omega) = \lim_{n \to \infty} S_n(\omega)$.

Для $\varepsilon > 0$ положим $X^{[\varepsilon]} = XI(|X| < \varepsilon)$.

Лемма 3.9

(i) *Если ряд* $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k$ *сходится с вероятностью 1, то* $X_n \to 0$ *п. н.*

(ii) *Если ряд* $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k$ *сходится с вероятностью 1 и случайные величины* $X_1, X_2, \ldots$ *независимы, то* $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant \varepsilon) < \infty$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

(iii) *Если* $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant \varepsilon) < \infty$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$, *то ряд* $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k$ *сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда с вероятностью 1 сходится ряд* $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k^{[\varepsilon]}$.

(iv) *Если ряд* $\sum\limits_{k\geqslant 1} (X_k - \mathsf{E}X_k)$ *сходится с вероятностью 1, то ряд* $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k$ *сходится с вероятностью 1 в том и только в том случае, когда сходится ряд* $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{E}X_k$.

Сходимость рядов независимых случайных величин

Доказательство

(i) Так как $S_n \to S$ п. н. и $S_{n-1} \to S$ п. н., то $X_n = S_n - S_{n-1} \to 0$ п. н.
Утверждение (ii) следует из (i) и леммы 3.7 (ii).
(iii) В силу леммы Бореля — Кантелли с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий $\{|X_k| \geqslant \varepsilon\}$, а это означает, что, начиная с некоторого номера, с вероятностью 1 происходят лишь события $\{|X_k| < \varepsilon\} = \{X_k = X_k^{[\varepsilon]}\}$. Но если члены рядов совпадают, начиная с некоторого номера, то ряды сходятся или расходятся одновременно.
Утверждение (iv) следует из представления частичных сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathsf{E}X_k) + \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}X_k.$$

$\square$

Теорема 3.6 (критерий Колмогорова)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых случайных величин,* $\mathsf{E}X_k = 0$, $k \geqslant 1$. *Если* $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{D}X_k < \infty$, *то ряд* $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k$ *сходится с вероятностью 1.*

Доказательство

Ряд $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k$ сходится с вероятностью 1, если последовательность $\{S_n\}_{n\geqslant 1}$ фундаментальна почти наверное, т. е. если для всех $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\big(\sup_{n\geqslant m} |S_n - S_m| \geqslant \varepsilon\big) \to 0, \quad m \to \infty. \tag{3.14}$$

Доказательство

В силу леммы 3.1 (i) и неравенства Колмогорова (2.29)

$$\mathsf{P}(\sup_{n\geqslant m}|S_n - S_m| \geqslant \varepsilon) = \lim_{N\to\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{m+1\leqslant n\leqslant N}\Big|\sum_{k=m+1}^{n} X_k\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty}\varepsilon^{-2}\sum_{k=m+1}^{N}\mathsf{D}X_k = \varepsilon^{-2}\sum_{k\geqslant m+1}\mathsf{D}X_k.$$

Поэтому, если $\sum\limits_{k\geqslant 1}\mathsf{D}X_k < \infty$, то выполнено условие (3.14) и, следовательно, ряд $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k$ сходится с вероятностью 1. □

Сходимость рядов независимых случайных величин

Следствие 3.1

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых случайных величин и пусть* $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{D}X_k < \infty$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k$ *сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{E}X_k$*.*

Доказательство

Так как $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{D}X_k < \infty$, то из теоремы 3.6 следует, что ряд $\sum\limits_{k\geqslant 1} (X_k - \mathsf{E}X_k)$ сходится с вероятностью 1. Из утверждения (iv) леммы 3.9 вытекает требуемое утверждение. □

Теорема 3.7

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых случайных величин и пусть для некоторого* $\varepsilon > 0$ *сходятся ряды*

$$\sum_{k\geqslant 1} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant \varepsilon) \quad \text{и} \quad \sum_{k\geqslant 1} \mathsf{D} X_k^{[\varepsilon]}.$$

Тогда

(i) *Ряд* $\sum\limits_{k\geqslant 1} (X_k - \mathsf{E} X_k^{[\varepsilon]})$ *сходится с вероятностью 1.*

(ii) *Ряд* $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k$ *сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда ряд* $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{E} X_k^{[\varepsilon]}$ *сходится.*

Доказательство

(i) Так как $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{D} X_k^{[\varepsilon]} < \infty$, то ряд $\sum\limits_{k\geqslant 1} (X_k^{[\varepsilon]} - \mathsf{E} X_k^{[\varepsilon]})$ сходится с вероятностью 1 в силу теоремы 3.6. Из сходимости ряда $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant \varepsilon)$ следует, что с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий $\{X_k \neq X_k^{[\varepsilon]}\}$, и, значит, ряд $\sum\limits_{k\geqslant 1} (X_k - \mathsf{E} X_k^{[\varepsilon]})$ сходится с вероятностью 1.

Утверждение (ii) следует из (i) и представления

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathsf{E} X_k^{[\varepsilon]}) + \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E} X_k^{[\varepsilon]}.$$

□

Теорема 3.8 (критерий двух рядов)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых случайных величин и пусть* $\mathsf{P}(|X_k| \leqslant y) = 1$ *для некоторого* $y > 0$, $k \geqslant 1$. *Тогда для сходимости ряда* $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k$ *с вероятностью 1 необходимо и достаточно сходимости рядов* $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{E}X_k$ *и* $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{D}X_k$.

Доказательство

Необходимость. Пусть ряд $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k$ сходится с вероятностью 1. Тогда последовательность $\{S_n\}_{n\geqslant 1}$ фундаментальна по вероятности, т. е. для всех $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(|S_n - S_m| \geqslant \varepsilon) \to 0, \quad m, n \to \infty.$$

Следовательно, для всех $\varepsilon > 0$ и достаточно больших m и n

$$\mathsf{P}(|S_n - S_m| \geqslant \varepsilon) < 1/8. \tag{3.15}$$

Доказательство

Рассмотрим симметризованные случайные величины $X_n^s = X_n - X_n'$, где для каждого $n \geqslant 1$ $X_n' \stackrel{d}{=} X_n$ и последовательность независимых случайных величин $\{X_n'\}_{n\geqslant 1}$ не зависит от последовательности $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$. Применяя последовательно неравенства (2.34) и (2.26), получим

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(|S_n - S_m| \geqslant \varepsilon) &\geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}(|X_{m+1}^s + \ldots + X_n^s| \geqslant 2\varepsilon) \geqslant \\ \geqslant \quad & \frac{1}{4}\mathsf{P}(\max_{m+1\leqslant l\leqslant n}|X_{m+1}^s + \ldots + X_l^s| \geqslant 2\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.16}$$

для всех $\varepsilon > 0$ и $n > m$.

Доказательство

Так как $\mathsf{P}(|X_k^s| \leqslant 2y) = 1$, $\mathsf{E}X_k^s = 0$ и $\mathsf{D}X_k^s = 2\mathsf{D}X_k$, то из неравенства (2.31) получаем:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(\max_{m+1 \leqslant l \leqslant n} |X_{m+1}^s + \ldots + X_l^s| \geqslant 2\varepsilon\right) &\geqslant 1 - \frac{(2\varepsilon + 2y)^2}{2\mathsf{D}(S_n - S_m)} = \\ &= 1 - \frac{2(\varepsilon + y)^2}{\sum\limits_{k=m+1}^{n} \mathsf{D}X_k}. \qquad (3.17) \end{aligned}$$

Доказательство

Если допустить, что $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{D}X_k = \infty$, то из неравенств (3.16) и (3.17) следует, что для достаточно больших m и n

$$\mathsf{P}(|S_n - S_m| \geqslant \varepsilon) \geqslant 1/8,$$

что противоречит неравенству (3.15).

Так как $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{D}X_k < \infty$, то по следствию 3.1 сходится и ряд $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{E}X_k$.

Достаточность вытекает из следствия 3.1. $\square$

Следующая теорема даёт необходимое и достаточное условие сходимости ряда $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k$ без предположений об ограниченности случайных величин.

Теорема 3.9 (критерий трёх рядов)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых случайных величин. Для сходимости ряда $\sum\limits_{k\geqslant 1} X_k$ с вероятностью 1 необходимо, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ сходились ряды

$$\sum_{k\geqslant 1} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant \varepsilon), \quad \sum_{k\geqslant 1} \mathsf{D}X_k^{[\varepsilon]}, \quad \sum_{k\geqslant 1} \mathsf{E}X_k^{[\varepsilon]},$$

и достаточно, чтобы эти ряды сходились при некотором $\varepsilon > 0$.

Доказательство

Достаточность следует из теоремы 3.7.

Необходимость. Пусть ряд $\sum\limits_{k \geqslant 1} X_k$ сходится с вероятностью 1, тогда в силу леммы 3.9 ряд $\sum\limits_{k \geqslant 1} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant \varepsilon)$ сходится для всех $\varepsilon > 0$ и, следовательно, для всех $\varepsilon > 0$ ряд $\sum\limits_{k \geqslant 1} X_k^{[\varepsilon]}$ сходится с вероятностью 1. По теореме 3.8 отсюда следует сходимость рядов $\sum\limits_{k \geqslant 1} \mathsf{E} X_k^{[\varepsilon]}$ и $\sum\limits_{k \geqslant 1} \mathsf{D} X_k^{[\varepsilon]}$. $\square$